تمارين محلولة

تمرين 1

u_3, u_2, u_1 ثلاثة حدود لمتتالية حسابية حيث :

$u_1 + u_2 + u_3 = 36$ و $u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428$.

عين u_3, u_2, u_1

الحــل

$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 36 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 3u_2 = 36 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428 \end{cases}$

ومنه $u_2 = 12$ وبتعويض قيمة u_2 في الجملة السابقة نجد :

$\begin{cases} u_1 + u_3 = 24 \\ u_1 \times u_3 = 119 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} u_3 = 24 - u_1 \\ u_1^2 - 24u_1 + 119 = 0 \end{cases}$

ومنه ($u_1 = 17$ و $u_3 = 7$) أو ($u_1 = 7$ و $u_3 = 17$) إذن :

$(u_1 = 17, u_2 = 12, u_3 = 7)$ أو $(u_1 = 7, u_2 = 12, u_3 = 17)$

تمرين 2

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r و S_n هو مجموع n حدا الأولى من هذه المتتالية .

1) أحسب r و S_{15} علما أن : $u_0 = -3$ و $u_{14} = 25$

2) أحسب r و n علما أن : $u_0 = 2$ و $u_{n-1} = -15$ و $S_n = -117$

3) أحسب u_0 و r علما أن : $u_{n-1}=39$ و $n=20$ و $S_n=400$

الحل

1) $S_{15}=(u_0+u_{14})\times\frac{15}{2}=22\times\frac{15}{2}=165$

نعلم أن: $u_{14}=u_0+14r$ ومنه $25=-3+14r$ ومنه $r=2$

2) $S_n=u_0+...+u_{n-1}=(u_0+u_{n-1})\times\frac{n}{2}=-117$

ومنه : $-13\times\frac{n}{2}=-117$ ومنه : $n=117\times\frac{2}{13}=18$

$u_{n-1}=u_{17}=u_0+17r=2+17r=-15$ ومنه : $r=-1$

3) $S_n=S_{20}=(u_0+u_{19})\times\frac{20}{2}=(u_0+39)\times 10=400$

ومنه : $u_0+39=40$ ومنه : $u_0=1$

لدينا : $u_{19}=u_0+19r=1+19r=39$ ومنه : $r=2$

تمرين 3

c,b,a بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية مجموعها 333 ومجموع مربعاتها 37205. عين الأعداد c,b,a

الحل

c,b,a حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني : $2b=a+c$

ومنه : $a+b+c=3b=333$ ومنه : $b=111$

نعلم أن : $a=b-r$ و $c=b+r$ و $a^2+b^2+c^2=37205$

ومنه : $(b-r)^2+b^2+(b+r)^2=3b^2+2r^2=37205$

بما أن $b=111$ فإن : $2r^2=242$ ومنه : $r=-11$ أو $r=11$

إذا كان $r=11$ فإن $a=b-r=100$ و $c=b+r=122$

إذا كان $r=-11$ فإن $a=b-r=122$ و $c=b+r=100$

تمرين 4

عين الأعداد الحقيقية c,b,a حيث $a+b+c=\frac{19}{2}$

والأعداد $2a$, b , $(c-5)$ بهذا الترتيب هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية مجموعها يساوي 9

الحل

$2a,b,(c-5)$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني :

$2b=2a+(c-5)$ ومنه $2a+b+c-5=3b=9$ ومنه $b=3$

وبتعويض $b=3$ في المعادلات السابقة نجد : $\begin{cases} a+c=\frac{13}{2} \\ 2a+c=11 \end{cases}$

ومنه : $a=9/2$ و $c=2$.

إذن الأعداد الحقيقية المطلوبة هي : $a=9/2$, $b=3$, $c=2$

تمرين 5

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_{n+1}=4n+1$

1) بين أن (u_n) متتالية حسابية وعين أساسها r وحدها الأول u_1

2) هل العدد 2001 هو حد من حدود هذه المتتالية ؟

3) ما قيمة ورتبة الحد الذي نبدأ منه حتى يكون مجموع 20 حدا متتابعا من هذه المتتالية مساويا 1100.

4) أحسب الجداء : $2^1\times 2^5\times 2^9\times\ldots\times 2^{4n+1}$

الحل

1) $u_{n+1}-u_n=(4n+1)-[4(n-1)+1]=4$. إذن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1=4\times0+1=1$ وأساسها $r=4$

2) نعلم أن $u_{n+1}=4n+1$ ، إذن يكون العدد 2001 حد من حدود المتتالية (u_n) إذا وجد عدد طبيعي n بحيث : $2001=4n+1$

نلاحظ أن $n=500$ لأن : $2001=4\times500+1$.

إذن 2001 هو حد من حدود المتتالية (u_n)

3) لنرمز بـ u_p للحد الأول الذي نبدأ منه ويكون الحد العشرين u_{p+19}

نعلم أن $u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{p+19}=(u_p+u_{p+19})\times\frac{20}{2}=1100$

لدينا : $u_p=u_1+(p-1)\times r=1+4(p-1)=4p-3$

$u_{p+19}=u_1+(p+19-1)\times r=1+4(p+18)=4p+73$

$(u_p+u_{p+19})\times10=1100$ ومنه $8p+70=110$ أي $p=5$

إذن الحد الأول الذي نبد منه هو u_5 وقيمته هي :

$u_5=1+4\times4=17$

4) $2^1\times2^5\times\ldots\times2^{4n+1}=2^{1+5\ldots+(4n+1)}=2^{(2n+1)(n+1)}$

لأن $1+5+\ldots+(4n+1)$ يمثل مجموع لـ $(n+1)$ حد لمتتالية حسابية حدها الأول 1 وحدها الأخير $4n+1$

ونعلم أن : $1+5+\ldots+(4n+1)=(2n+1)(n+1)$

تمرين 6

نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 وأساسها q بحيث : $(u_6\neq0)$ $8u_6=125u_9$.

1) أحسب q

2) أحسب بدلالة u_0 و n المجموع $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

3) عين u_0 بحيث $\lim_{n\to+\infty}S_n=150$.

4) نفرض أن $u_0=90$. عين أصغر قيمة العدد الطبيعي p حيث من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أويسوي p يكون لدينا :

$n\geq p$: $u_n\leq10^{-3}$

الحل

1) $8u_6=125u_9$ ومنه $8u_0\times q^6=125u_0\times q^9$ ومنه

$q^3=\frac{8}{125}=\left(\frac{2}{5}\right)^3$ يعني أن: $q=\frac{2}{5}$

2) $$S_n=u_0+..+u_n=u_0\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}u_0\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$$

3) لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{3}u_0\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]=150$

ونعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2/5\right)^{n+1}=0$ ومنه $\frac{5}{3}\ u_0=150$ ومنه $u_0=90$

4) $u_n=u_0\times q^n=90\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$. با عطاء القيم 1، 2، 3 ...، إلى العدد الطبيعي n نجد :

$u_1=36\ ,\ u_2=14{,}4\ ,\ u_3=5{,}76\ ,....\ ,\ u_{12}=0{,}0015$

$u_{13}=0{,}0006$

نلاحظ أنه ابتداء من u_{13} تكون الحدود أقل من 10^{-3} أي: $u_n\le 10^{-3}$

إذن أصغر قيمة العدد الطبيعي p هي $p=13$.

يمكن استعمال اللوغارتم للوصول إلى هذه النتيجة .

تمرين 7

u_5,u_4,u_3,u_2,u_1 خمسة حدود لمتتالية هندسية . عين هذه الحدود علما أن : $u_3>0$ و $u_1\times u_5=81$ و $u_2+u_3+u_4=39$

الحـــل

$u_1\times u_5=u_1\times u_1\times q^4=\left(u_1\times q^2\right)^2=\left(u_3\right)^2=81$

ومنه $u_3=9$ لأن $u_3>0$. نعلم أن $u_4=u_3\times q$; $u_2=\frac{u_3}{q}$

لدينا $u_2+u_3+u_4=39$ ومنه : $u_2+u_4=\frac{9}{q}+9q=30$

ومنه : $\frac{3}{q}+3q=10$ ومنه : $3q^2-10q+3=0$

و منه $q=3$ أو $q=1/3$. إذا كان $q=3$ فإن:

$u_1=1\ ,\ u_2=3\ ,\ u_3=9\ ,\ u_4=27\ ,\ u_5=81$

إذا كان $q=1/3$ فإن :

$u_1=81\ ,\ u_2=27,\ u_3=9\ ,\ u_4=3\ ,\ u_5=1$.

تمرين 8

$c\,,b\,,a$ ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث مجموعها 63 و جداؤها 1728 . عين هذه الحدود

الحـــل

c,b,a ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني : $a\times c=b^2$

ومنه $a\times b\times c=b^3=1728$ ومنه : $b^3=12^3$ إذن : $b=12$

وبتعويض $b=12$ في ما سبق نجد :

$\begin{cases}a\times c=144\\ a+c=51\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}a=51-c\\ c^2-51c+144=0\end{cases}$

ومنه $\left(c=3\ ,\ a=48\right)$ أو $\left(c=48\ ,\ a=3\right)$

إذن الأعداد c,b,a المطلوبة هي :

$\left(c=3\ ,\ b=12\ ,\ a=48\right)$ أو $\left(c=48\ ,\ b=12\ ,\ a=3\right)$

تمرين 9

u_1 , u_2 , u_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية موجبة حيث

$u_1+u_2+u_3=7$ و $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{7}{4}$. أحسب u_3,u_2,u_1

الحل

$$u_1+u_2+u_3=u_1+u_1q+u_1q^2=u_1\left(1+q+q^2\right)=7 \quad (*)$$

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1q}+\frac{1}{u_1q^2}=\frac{q^2+q+1}{u_1q^2}=\frac{7}{4} \quad (**)$$

بتقسيم $(*)$ على $(**)$ نجد $u_1^2\times q^2=\left(u_1\times q\right)^2=\left(u_2\right)^2=4$

ومنه $u_2=2$ (لأن حدود المتتالية موجبة) .

بتعويض u_2 في ما سبق نجد :

$\begin{cases} u_1+u_3=5 \\ \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_3}=\frac{5}{4} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1+u_3=5 \\ \frac{u_1+u_3}{u_1\times u_3}=\frac{5}{4} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1+u_3=5 \\ u_1\times u_3=4 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} u_1=5-u_3 \\ u_3^2-5u_3+4=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1=5-u_3 \\ u_3=4 \vee u_3=1 \end{cases}$

إذا كان $u_3=4$ فإن $u_1=1$ وإذا كان $u_3=1$ فإن $u_1=4$

إذن $\left(u_3=4 \ , \ u_2=2 \ , \ u_1=1\right)$ أو $\left(u_3=1 \ , \ u_2=2 \ , \ u_1=4\right)$

تمرين 10

عين ألأعداد الحقيقية c,b,a التي تحقق الشروط الآتية :

- c,b,a بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية
- b,c,a بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية
- $a+b+c=30$

الحل

a , b , c حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني $a+c=2b$ ومنه :

$a+b+c=3b=30$ ومنه $b=10$

b,c,a حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني $c^2=ab$

وبتعويض $b=10$ في ماسبق نجد $a+c=20$ و $c^2=10a$

ومنه : ($a=\frac{c^2}{10}$ و $\frac{c^2}{10}+c=20$)

ومنه : ($a=c^2/10$ و $c^2+10c-200=0$)

ومنه $c=10$ أو $c=-20$. إذن ألأعداد c,b,a المطلوبة هي :

$\left(c=10, \ b=10 \ ,a=10\right)$ أو $\left(c=-20 \ , \ b=10 \ , \ a=40\right)$

تمرين 11

c,b,a بهذا الترتيب تمثل حدود متتابعة لمتتالية هندسية حيث :

$a+b+c=312$ و $c-a=192$. عين c,b,a

الحل

$$a+b+c=a+aq+aq^2=a\left(1+q+q^2\right)=312 \quad (*)$$

$$c-a=aq^2-a=a\left(q^2-1\right)=192 \quad (**)$$

بتقسيم $(*)$ على $(**)$ نجد : $\frac{q^2+q+1}{q^2-1}=\frac{312}{192}=\frac{13}{8}$

ومنه $8\left(1+q^2+q\right)=13\left(q^2-1\right)$ ومنه $5q^2-8q-21=0$

ومنه $q=3$ أو $q=-\frac{7}{5}$. إذا كان $q=3$ ، من المعادلة $(*)$ نجد:

$$c=bq=216\,,\ b=aq=24\times 3=72\ ,\ a=\frac{312}{13}=24$$

إذا كان $q=-\frac{7}{5}$ من المعادلة $(**)$ نجد: $\frac{24}{25}a=192$

ومنه $a=200$ و $b=aq=-280$ و $c=bq=392$.

تمرين 12

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ أساسها q حيث $0<q<1$

عين الحد العام u_n علما أن : $\begin{cases} u_2\times u_3\times u_4=64 \\ u_2^2+u_3^2+u_4^2=\frac{1456}{9} \end{cases}$

الحل

$u_3^2=u_2\times u_4$ ومنه $u_2\times u_3\times u_4=u_3^3=4^3$ ومنه $u_3=4$

نعلم أن : $u_2=u_3\div q$ و $u_4=u_3\times q$.

ومنه : $u_2^2+u_3^2+u_4^2=u_3^2\left(\frac{1}{q^2}+q^2+1\right)=\frac{1456}{9}$

ومنه : $16\left(\frac{q^4+q^2+1}{q^2}\right)=\frac{1456}{9}$ ومنه:

$\frac{q^4+q^2+1}{q^2}=\frac{91}{9}$ ومنه : $9q^4-82q^2+9=0$.

بوضع $q^2=x$ نحصل علىالمعادلة : $9x^2-82x+9=0$

وحلولها هي : $x_1=9$ أو $x_2=1/9$.

بما أن $0<q<1$ و $q^2=x$ فإن $q=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$.

لدينا: $u_3=u_0q^3=u_0\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=4$ ومنه: $u_0=4\times 27=108$

إذن : $u_n=u_0\times q^n=108\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

تمرين 13

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $\begin{cases} u_0\times u_2=3u_1 \\ u_0+u_1+u_2=13 \end{cases}$

1) أحسب $u_0\,,u_1\,,u_2$.

2) أحسب الحد العام u_n بدلالة n للمتتالية الهندسية المتزايدة .

الحل

نعلم أن $u_0\times u_2=u_1^2$ (الوسط الهندسي) ولدينا $u_0\times u_2=3u_1$

ومنه : $u_1^2=3u_1$ ومنه : $u_1=3$ و $u_0+u_2=10$

نعلم أن $u_0 = \frac{u_1}{q}$ و $u_2 = u_1 q$ ومنه : $\frac{3}{q} + 3q = 10$

ومنه: $3q^2 - 10q + 3 = 0$ ومنه : $q = 3$ أو $q = 1/3$.

إذا كان $q = 3$ فإن : $u_0 = u_1 \div q = 1 , u_1 = 3 , u_2 = u_1 q = 9$

إذا كان $q = 1/3$ فإن : $u_0 = u_1 \div q = 9 , u_1 = 3 , u_2 = 1$

إذا كان $q = 3$ فالمتتالية (u_n) متزايدة ويكون حدها العام :

$$u_n = u_0 \times q^n = 3^n$$

تمرين 14

عين العددين الحقيقيين الموجبين b , a حيث :

- a , $(6a-b)$, $(a+2b)$ هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية .
- a , $(b+1)$, $(4b-a)$ هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية .

الحـــل

a,$(6a-b)$,$(a+2b)$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني أن :

$a + (a+2b) = 2(6a-b)$ ومنه : $5a = 2b \ (*)$

a,$(b+1)$,$(4b-a)$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني أن :

$$(b+1)^2 = a(4b-a) \ (**)$$

من المعادلة $(*)$ نجد : $b = \frac{5a}{2}$ وبالتعويض في $(**)$ وبعد النشر والتبسيط للمعادلة نجد : $11a^2 - 20a - 4 = 0$

وجذور هذه المعادلة هي : $a = 2$ أو $a = -\frac{2}{11}$ (مرفوض)

إذن : $a = 2$ و $b = \frac{5a}{2} = 5$

تمرين 15

(u_n) متتالية هندسية موجبة ومتزايدة ، حدها الأول u_1 وأساسها q .

1) عين الحدود u_1 , u_2 , u_3 , u_4 علما أن :

$u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = 64$ و $u_2 + u_3 = 6$

2) أحسب u_n بدلالة n. هل (u_n) متقاربة ؟

الحـــل

1) u_1 , u_2 , u_3 , u_4 حدود متتالية هندسية فإن $u_1 \times u_4 = u_2 \times u_3$

ومنه : $u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = (u_2 \times u_3)^2 = 64 = 8^2$.

ومنه $u_2 \times u_3 = 8$ (لأن $u_2 > 0$ و $u_3 > 0$) . لدينا :

$\begin{cases} u_2 + u_3 = 6 \\ u_2 \times u_3 = 8 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} u_3 = 6 - u_2 \\ u_2^2 - 6u_2 + 8 = 0 \end{cases}$

ومنه : $(u_2 = 2$ أو $u_2 = 4)$ و $u_3 = 6 - u_2$.

إذا كان $u_2 = 2$ فإن $u_3 = 6 - u_2 = 4$ ((u_n) متزايدة) .

إذا كان $u_2 = 4$ فإن $u_3 = 6 - 4 = 2$ (u_n) متناقصة (مرفوضة)

ويكون q أساس المتتالية (u_n) المتزايدة يساوي : $q = u_3 \div u_2 = 2$

إذن : $u_1 = u_2 \div q = 1$ و $u_4 = u_3 \times q = 8$

2) $u_n = u_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$. لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذن (u_n) متباعدة

تمرين 16

1) أثبت أنه إذا كان x , y , z ثلاثة أعداد حقيقية وحدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)(x-y+z)$

2) عين ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن مجموعها 42 و مجموع مربعاتها 1092 .

الحل

1) x , y , z حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني $y^2 = x\times z$

$$(x+y+z)(x-y+z) = x^2+2xz-y^2+z^2 =$$

$$x^2+2y^2-y^2+z^2 = x^2+y^2+z^2$$

2) لدينا $x+y+z=42$ و $x^2+y^2+z^2=1092$

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)(x-y+z)=42(x-y+z)$$

ومنه $x-y+z = 1092\div 42 = 26$ و منه :

$$(x+y+z)-(x-y+z)=2y=16$$

ومنه : $y=8$. لدينا : $x+y+z=42$ ومنه : $x+z=34$

ونعلم أن $x=\frac{y}{q}$ و $z=yq$. وبتعويض في المعادلة السابقة

نجد : $x+z=\frac{y}{q}+yq = 8\left(\frac{1}{q}+q\right)=8\left(\frac{q^2+1}{q}\right)=34$

ومنه : $\frac{q^2+1}{q}=\frac{17}{4}$ ومنه : $4q^2-17q+4=0$

ومنه : $q=4$ او $q=1/4$

إذا كان $q=4$ فإن $x=2$, $y=8$, $z=32$

إذا كان $q=\frac{1}{4}$ فإن $x=32$, $y=8$, $z=2$.

تمرين 17

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة كما يلي :

الخمسة الحدود الأولى تشكل متتالية حسابية حدها الأول $u_1=1$

وأساسها $r=1/2$ وبداية من الحد الرابع حدود المتتالية (u_n)

تشكل متتالية هندسية أساسها 6/5

1) أحسب u_2 , u_3 , u_4 ثم u_n بدلالة n

2- أ) أحسب $S_n = u_1+u_2+...+u_n$. ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الحل

1) $u_2 = u_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $u_3=u_2+\frac{1}{2}=2$, $u_4=u_3+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

ومن أجل $n\ge 4$ فإن :

$$u_n = u_4\times q^{n-4} = \frac{5}{2}\times\left(\frac{6}{5}\right)^{n-4} = \frac{5}{2}\times\frac{6}{5}\times\left(\frac{6}{5}\right)^{n-5} = 3\left(\frac{6}{5}\right)^{n-5}$$

$$S_n = (u_1+u_2+u_3)+(u_4+...+u_n)=\frac{9}{2}+(u_4+...+u_n)$$

$(u_4+...+u_n)$ تمثل مجموع $(n-3)$ حدا لمتتالية هندسية حدها الأول $u_4 = 5/2$ وأساسها $q = 6/5$ ومنه

$$u_4+...+u_n = u_4\times\frac{q^{n-3}-1}{q-1} = \frac{25}{2}\times\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{n-3}-1\right]$$

ومنه : $S_n = \frac{9}{2}+\frac{25}{2}\times\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{n-3}-1\right]$

ب) $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^{n-3} = +\infty$).

تمرين 18

(u_n) متتالية هندسية متناقصة معرفة على $\mathbb{N}^*$ أساسها q حيث

$u_1\times u_2\times u_3 = \frac{125}{8}$ و $\left(u_1-\frac{5}{12}\right), u_2, u_3$ تمثل حدود متتابعة لمتتالية حسابية . 1) أحسب u_1,u_2,u_3 والأساس q للمتتالية (u_n)

2) أحسب المجموع $S_n = u_1+u_2+...+u_n$

3) أحسب الجداء $P_n = u_1\times u_2\times...\times u_n$

الحل

1) بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن : $u_1\times u_3 = (u_2)^2$ ومنه:

$u_1\times u_2\times u_3 = (u_2)^3 = \frac{125}{8} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$ ومنه : $u_2 = \frac{5}{2}$

ومنه : $(*)$ $u_1\times u_3 = \frac{125}{8}\div\frac{5}{2} = \frac{25}{4}$

$\left(u_1-5/12\right), u_2, u_3$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن

$\left(u_1-\frac{5}{12}\right)+u_3 = 2u_2 = 5$ ومنه : $u_1+u_3 = \frac{65}{12}$ $(**)$

من $(*)$و$(**)$ نجد : $\begin{cases} u_1+u_3 = \frac{65}{12} \\ u_1\times u_3 = \frac{25}{4} \end{cases}$

ومنه :

($u_3 = \frac{65}{12}-u_1$ و $u_1^2-\frac{65}{12}u_1+\frac{25}{4} = 0$) ومنه :

($u_1 = \frac{15}{4}$ و $u_3 = \frac{5}{3}$) أو ($u_1 = \frac{5}{3}$ و $u_3 = \frac{15}{4}$)

وبما أن (u_n) متتالية متناقصة فيكون $u_1 > u_3$

إذن : $u_1 = \frac{15}{4}$, $u_2 = \frac{5}{2}$, $u_3 = \frac{5}{3}$

ويكون أساس المتتالية (u_n) هو $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{3}$.

2) $S_n = u_1+...+u_n = u_1\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3} = \frac{45}{4}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

3) $P_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n = u_1 \times u_1 q \times u_1 q^2 \times ... \times u_1 q^{n-1} =$

$$= (u_1)^n \times q^{1+2+...+n-1} = \left(\frac{15}{4}\right)^n \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

لأن $1+2...+(n-1)$ يمثل مجموع لـ $(n-1)$ حد لمتتالية حسابية حدها الأول 1 وحدها الأخير $(n-1)$.

تمرين 19

I. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = 6$ ومجموع حدودها الستة الأولى ينقص عن مجموع حدودها الثلاثة التي تليها بـ 6 .

1) عين أساس المتتالية (u_n). 2) عين رتبة الحد الذي قيمته 302

II. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 16$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$.

نريد حساب مجموع 10 حدود متتابعة للمتتالية (v_n) بحيث يكون مجموعها يساوي $\frac{1023}{512}$. ما هي رتبة الحد الذي نبدأ منه ؟

الحل

I. 1) $(u_7 + u_8 + u_9) - (u_1 + u_2 + ... + u_6) =$

$$= (3u_1 + 21r) - (6u_1 + 15r) = -3u_1 + 6r = 6$$

نعلم أن $u_1 = 6$ و منه : $-18 + 6r = 6$ ومنه : $r = 4$

2) لتكن p رتبة الحد الذي قيمته 302 ومنه:

$u_p = u_1 + (p-1)r = 6 + (p-1) \times 4 = 302$ ومنه $p = 75$

II. نفرض أن الحد الذي نبدأ منه هو v_p ومنه مجموع العشرة الحدود المتتابعة التي حدها الأول v_p يساوي $v_p \times \frac{1-q^{10}}{1-q}$

لدينا حسب المعطيات $v_p \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = \frac{1023}{512}$ و $q = \frac{1}{2}$

ومنه : $v_p \times \left(\frac{2^{10}-1}{2^9}\right) = v_p \times \frac{1023}{512} = \frac{1023}{512}$

ومنه : $v_p = 1$

نعلم أن $1 = v_p = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^p$ ومنه $\left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{16}$ ومنه $p = 4$

إذن الحد الذي نبدأ منه هو v_4 ورتبته هي الرتبة الخامسة.

تمرين 20

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n = \frac{2-n}{2}$.

1) برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها .

2) لتكن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $v_n = e^{u_n}$.

برهن أن (v_n) متتالية هندسية متقاربة.

3- أ) أحسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ب) أحسب الجداء $P_n = v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$

الحـــل

1) $u_{n+1}-u_n=\frac{2-(n+1)}{2}-\frac{2-n}{2}=-\frac{1}{2}$

ومنه (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها $r=-\frac{1}{2}$

2) $v_{n+1}=e^{u_{n+1}}=e^{\frac{2-(n+1)}{2}}=e^{\frac{2-n}{2}-\frac{1}{2}}=e^{\frac{2-n}{2}}\times e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}\times v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-\frac{1}{2}}$.

بما أن $-1<q<1$ فالمتتالية (v_n) متقاربة وتتقارب إلى 0

3) $S_n=u_0+u_1+...+u_n=(u_0+u_n)\times\frac{n+1}{2}=$

$$=(u_0+u_0+nr)\times\left(\frac{n+1}{2}\right)=\left(2-\frac{1}{2}n\right)\times\frac{n+1}{2}$$

ب) $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_n=v_0\times(v_0q)\times...\times(v_0q^n)$

$$=(v_0)^{n+1}\times q^{1+...+n}=e^{n+1}\times\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(لأن $v_0=e^{u_0}=e$ و $1+2+3+...+n=(n+1)\times\frac{n}{2}$.

تمرين 21

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ والعلاقة

التراجعية $2nu_{n+1}=(n+1)u_n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع $v_n=\frac{u_n}{n}$

1) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

2- أ) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n . ب) برهن أن (u_n) متقاربة

3) أحسب بدلالة n : $\alpha_n=v_1\times v_2\times...\times v_n$

الحـــل

1) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق $v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}\times v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1=\frac{1}{2}$

2- أ) بما أن (v_n) متتالية هندسية فيكون حدها العام : $v_n=v_1q^{n-1}$

ومنه $v_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$. لدينا $v_n=\frac{u_n}{n}$ ومنه $u_n=nv_n$

إذن $u_n=n\times\frac{1}{2^n}=\frac{n}{2^n}$. ب) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$

إذن المتتالية (u_n) متقاربة وتتقارب إلى 0

3)

$$\alpha_n=v_1\times v_2\times...\times v_n=v_1\times v_1q\times v_1q^2\times...\times v_1q^{n-1}=$$

$$= v_1^{\,n} \times q^{1+2+...+(n-1)} = \frac{1}{2^n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{n(n-1)}{2}}$$

تمرين 22

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=1$ و $(\alpha\in\mathbb{R})$ $u_n=\alpha u_{n-1}+2$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1- أ) عين α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

ب) ما طبيعة المتتالية (u_n) إذا كان $\alpha=1$.

2) نفرض أن $\alpha\neq -1$ و $\alpha\neq 1$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$

من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-\frac{2}{1-\alpha}$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q

ب)عين قيم α حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

الحل

1- أ) تكو ن المتتالية (u_n) ثابتة إذا تحقق لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n$

وحسب المعطيات لدينا $u_0=1$ ومنه المتتالية (u_n) ثابتة لما :

$u_{n+1}=u_n=u_0=1$ ومنه : $\alpha\times1+2=1$ ومنه : $\alpha=-1$

ب) إذا كان $\alpha=1$ فإن : $u_n=u_{n-1}+2$ ومنه : $u_n-u_{n-1}=2$

إذن المتتالية (u_n) هي متتالية حسابية أساسها 2.

2- أ) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان : $v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{1-\alpha}=\alpha u_n+2-\frac{2}{1-\alpha}=$$

$$=\alpha u_n+\frac{2(1-\alpha)-2}{1-\alpha}=\alpha\left(u_n-\frac{2}{1-\alpha}\right)=\alpha\times v_n$$

إذن (v_n) هي متتالية هندسية حدها الأول $v_0=1-\frac{2}{1-\alpha}=\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$

وأساسها $q=\alpha$. ب) تكون المتتالية الهندسية (v_n) متقاربة إذا كان

أساسها $\alpha\in]-1\,;1[$ وفي هذه الحالة تكون $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.

تمرين 23

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل

كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما .

2) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n\le 3$

3) برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة

الحل

1) (u_n) متتالية متزايدة يعني لكل n من $\mathbb{N}$ فأن : $u_{n+1}-u_n>0$

لنبرهن أن المتتالية (u_n) متزايدة نستعمل البرهان بالتراجع .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}$ الخاصية p المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

ب- $p(n):\quad u_{n+1}-u_n>0$

من أجل $n=0$ لدينا $u_1-u_0=\sqrt{6}>0$. إذن $p(0)$ محققة .

لنفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_{n+1}-u_n>0$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+2}-u_{n+1}>0$.

$$u_{n+2}-u_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}+6}-\sqrt{u_n+6}=$$

$$=\frac{(u_{n+1}+6)-(u_n+6)}{\sqrt{u_{n+1}+6}+\sqrt{u_n+6}}=\frac{u_{n+1}-u_n}{\sqrt{u_{n+1}+6}+\sqrt{u_n+6}}$$

لدينا $u_{n+1}-u_n>0$ حسب فرضية البرهان بالتراجع ومنه

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\sqrt{u_{n+1}+6}+\sqrt{u_n+6}}>0 \quad \text{ومنه} \quad u_{n+2}-u_{n+1}>0$$

إذن $p(n+1)$ صحيحة ، ومنه الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ($u_{n+1}-u_n>0$) ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

2) لكي نبرهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n\le 3$ نستعمل البرهان بالتراجع .

لتكن $p(n)$ خاصية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n\le 3$ لكل n من $\mathbb{N}$

من اجل $n=0$ فإن $u_0=0$ ومنه $p(0)$ صحيحة

لنفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_n\le 3$ ولنبرهن على صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}\le 3$. لدينا حسبا الفرضية : $u_n\le 3$

ومنه $u_n+6\le 3+6$ ومنه $\sqrt{u_n+6}\le 3$ ومنه $u_{n+1}\le 3$

إذن $p(n+1)$ صحيحة ، ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي : $u_n\le 3$

3)بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

تمرين 24

نعتبر المتتالية العددية المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0=\alpha \\ \forall n\in\mathbb{N}:\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{9}{4}\end{cases}$$

1) عين α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+k$ حيث k عدد حقيقي . عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q.

3) في ما يأتي نأخذ $k=-3$ و $\alpha=4$.

أ) أحسب v_n و u_n بدلالة n.   ب) أدرس تغيرات المتتالية (v_n)

ج) أحسب $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$.   د) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

الحل

(u_n) ثابتة يعني $u_0=u_1=...=u_n=u_{n+1}=\alpha$

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{9}{4}$ ومنه : $\alpha=\frac{1}{4}\alpha+\frac{9}{4}$ ومنه $\alpha=3$

2) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق: $v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + k = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} + k = \frac{1}{4}\left(u_n + k\right) + \frac{3k}{4} + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{1}{4}v_n + \left(\frac{3}{4}k + \frac{9}{4}\right)$$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان: $\frac{3k}{4} + \frac{9}{4} = 0$ ومنه $k = -3$

3- أ) حسب السؤال السابق إذا كان $k = -3$ فتكون المتتالية (v_n)

هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = \alpha - 3 = 4 - 3 = 1$

ومنه : $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $u_n = v_n + 3 = \frac{1}{4^n} + 3$

ب) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4^n} = \frac{1-4}{4^{n+1}} = -\frac{3}{4^{n+1}} < 0$

إذن المتتالية (v_n) متناقصة .

ج) $S_n = u_0 + ... + u_{n-1} = \left(v_0 + 3\right) + ... + \left(v_{n-1} + 3\right) =$

$$= \left(v_0 + ... + v_{n-1}\right) + 3n =$$

$$= v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} + 3n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) + 3n$$

د) $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ (لأن $\frac{1}{4^n} \to 0$ و $3n \to +\infty$ لما $n \to +\infty$)

تمرين 25

نعتبر المتتالية الحقيقية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$

وبالعلاقة التراجعية : $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) برهن بأن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q.

2- أ) أحسب v_n بدلالة n. ب) برهن أن المتتالية (v_n) متناقصة

3- أ) أحسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

الحـل

1) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 1$ وأساسها $\frac{1}{2}$

2- أ) $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2^n}$

ب) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}=\frac{1-2}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2^{n+1}}<0$

إذن (v_n) هي متتالية متناقصة . 3- ا) لدينا :

$$S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=v_0\frac{1-q^n}{1-q}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

ب) نعلم أن : $v_n=u_{n+1}-u_n$ ولدينا : $S_n=v_0+...+v_{n-1}$

$$S_n=(u_1-u_0)+...+(u_n-u_{n-1})=u_n-u_0=u_n-1$$

ومنه : $u_n=S_n+1=3-\frac{1}{2^{n-1}}$ وتكون $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

تمرين 26

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$u_1=-1$ و $u_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}\times u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن لكل n من $\mathbb{N}$ فإن : $u_n\le 3$

2)أدرس تغيرات المتتالية (u_n) واستنتج أن (u_n) متقاربة .

3)نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ : $v_n=n(3-u_n)$.

- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية وعين حدها الأول وأساسها .

4) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

الحل

1) $p(n)$ خاصية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n\le 3$

لدينا $u_1=-1\le 3$ ومنه $p(1)$ صحيحة . لنفرض أن $p(n)$ محققة أي $u_n\le 3$ ولنبرهن على صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}\le 3$. لدينا حسبا الفرضية : $u_n\le 3$

ومنه : $\frac{n}{2(n+1)}u_n\le\frac{3n}{2(n+1)}$ ومنه :

$$\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}\le\frac{3n}{2(n+1)}+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$ ومنه :

$u_{n+1}\le\frac{6(n+1)}{2(n+1)}$ ومنه $u_{n+1}\le 3$. بما أن $p(n+1)$ محققة

فإن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أي: $u_n\le 3$

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}-u_n=$

$$=\left(\frac{n}{2(n+1)}-1\right)u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}=-\frac{n+2}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$=-\frac{n+2}{2(n+1)}\times(u_n-3)>0$$

(لأن $-\frac{n+2}{2(n+1)} < 0$ و $u_n - 3 \le 0$).

بما أن $u_{n+1} - u_n > 0$ فالمتتالية (u_n) متزايدة وبما أنها محدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة

3) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = (n+1)(3-u_{n+1}) =$$

$$= (n+1)\left[3 - \frac{n}{2(n+1)}u_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right] =$$

$$= 3(n+1) - \frac{n}{2}u_n - \frac{3(n+2)}{2} = \frac{6(n+1)-3(n+2)}{2} - \frac{n}{2}u_n =$$

$$= \frac{3n}{2} - \frac{n}{2}u_n = \frac{1}{2}n(3-u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية حدها الأول $v_1 = 4$ وأساسها $\frac{1}{2}$

4) $v_n = v_1 q^{n-1} = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-3}}$

لدينا : $v_n = n(3-u_n)$ ومنه : $u_n = 3 - \frac{v_n}{n} = 3 - \frac{1}{n} \times \frac{1}{2^{n-3}}$.

تمرين 27

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} 3u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0 \\ u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = 3 \end{cases}$$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

2- أ) أحسب $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

ب) أكتب S_n بدلالة u_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) برهن بأن المتتالية (u_n) هي متتالية رتيبة .

الحـــل

1) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{5}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n =$$

$$= \frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{2}{3}v_n$$

إذن (v_n) هي متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها $\frac{2}{3}$.

2) $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 6\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

ب) $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = (u_1 - u_0) + ... + (u_n - u_{n-1})$

$S_n = u_n - u_0 = u_n - 1$

لدينا $S_n = u_n - 1$ ومنه : $u_n = S_n + 1 = 6\left[1-\left(2/3\right)^n\right]+1$

جـ -

$$u_{n+1}-u_n = 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=$$

$$=6\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(1-\frac{2}{3}\right)=2\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$$

بما أن $u_{n+1}-u_n>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة (رتيبة) .

تمرين 28

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_0=\alpha\ (\alpha\in\mathbb{R})$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $4v_{n+1}=v_n+9$

1) عين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

نفرض في كل ما يلي $\alpha=4$. 2) أحسب v_1 , v_2 , v_3

3) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n=v_n-3$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ) أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

ب) أكتب u_n ثم v_n بدلالة n .

جـ) أحسب المجموعين : $S_n = v_0+v_1+...+v_n$

$\pi_n = u_0+4u_1+4^2u_2+...+4^nu_n$

د) أثبت أن : $u_0\times u_1\times...\times u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)}$

الحل

1) تكون المتتالية (v_n) ثابتة لما جميع حدودها متساوية أي :

$v_0=v_1=...=v_n=v_{n+1}=\alpha$.

لدينا : $4v_{n+1}=v_n+9$ ومنه $4\alpha=\alpha+9$ و منه $\alpha=3$

2) لدينا : $4v_{n+1}=v_n+9$ ومنه : $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n+\frac{9}{4}$

$v_1=\frac{1}{4}v_0+\frac{9}{4}=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$, $v_2=\frac{1}{4}v_1+\frac{9}{4}=\frac{49}{16}$

$v_3=\frac{1}{4}v_2+\frac{9}{4}=\frac{193}{64}$

3- أ) تكون (u_n) متتالية هندسية إذا تحق $u_{n+1}=u_n\times q$

$$u_{n+1}=v_{n+1}-3=\frac{1}{4}v_n+\frac{9}{4}-3=\frac{1}{4}(v_n-3)=\frac{1}{4}u_n$$

إذن (u_n) هي متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$.

ب) $u_n=u_0\times q^n=(v_0-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{4^n}$.

لدينا : $u_n = v_n - 3$ ومنه : $v_n = u_n + 3 = \frac{1}{4^n} + 3$

جـ) $S_n = v_0 + \dots + v_n = (u_0 + 3) + \dots + (u_n + 3) =$

$= (u_0 + \dots + u_n) + 3(n+1)$

وبما أن $u_0 + \dots + u_n$ يمثل مجموع $(n+1)$ حدا لمتتالية هندسية

حدها الأول $u_0 = 1$ وأساسها $q = \frac{1}{4}$ فإن :

$$u_0 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

ومنه : $S_n = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right) + 3(n+1)$

$$\pi_n = u_0 + 4u_1 + 4^2 u_2 + \dots + 4^n u_n =$$

$$= u_0 + 4u_0 q + 4^2 u_0 q^2 + \dots + 4^n u_0 q^n =$$

$$= u_0\left[1 + 4q + (4q)^2 + \dots + (4q)^n\right] =$$

$$= u_0(1+1+1+\dots+1) = (n+1)$$

(لأن $u_0 = 1$ و $4q = 4\times\frac{1}{4} = 1$)

د) $u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = u_0 \times (u_0 q) \times \dots \times (u_0 q^n) =$

$$= q^{1+\dots+n} = q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)}$$

لأن $u_0 = 1$ و $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$).

تمرين 29

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) أحسب u_3, u_2, u_1 . 2)لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$v_n = u_n + \alpha n + \beta$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ حيث α, β عددان

2)عين العددين α, β بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

3)نفرض أن في ما يأتي $\alpha = 6$ و $\beta = -23$.

أ) أكتب عبارة v_n ثم u_n بدلالة n .

ب) نضع : $\pi_n = u_0 + \dots + u_n$, $S_n = v_0 + \dots + v_n$

أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج عبارة π_n .

الحل

1) $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$, $u_2 = \frac{19}{9}$, $u_3 = \frac{-45}{27}$

2) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يعني : $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha(n+1) + \beta$$
$$= \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta$$
$$= \frac{2}{3}(u_n + \alpha n + \beta) + \frac{1}{3}\alpha n + \frac{1}{3}\beta + \alpha - 2n + \frac{5}{3}$$
$$= \frac{2}{3}v_n + \left(\frac{\alpha}{3} - 2\right)n + \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3}$$

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يجب أن :

$$\left(\frac{\alpha}{3} - 2\right)n + \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3} = 0$$

ومنه : $\begin{cases} \frac{\alpha}{3} - 2 = 0 \\ \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3} = 0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -23 \end{cases}$

3- أ) إذا كان $\alpha = 6$ و $\beta = -23$ فإن (v_n) متتالية هندسية

(سؤال سابق) حدها الأول $v_0 = u_0 + \beta = -20$ وأساسها $\frac{2}{3}$

لدينا : $v_n = u_n + 6n - 23$. $v_n = v_0 \times q^n = (-20)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ومنه : $u_n = v_n - 6n + 23 = (-20)\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6n + 23$

ب) $S_n = v_0 + ... + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$S_n = (-60)\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$\pi_n = u_0 + u_1 + ... + u_n =$$
$$= (v_0 + 23) + (v_1 - 6 + 23) + ... + (v_n - 6n + 23)$$
$$= (v_0 + v_1 + ... + v_n) + (23 + 17 + 11 + ... + (23 - 6n))$$

$23 + 17 + 11 + ... + (23 - 6n)$ يمثل مجموع لـ $(n+1)$ حدا لمتتالية حسابية حدها الأول 23 و حدها الأخير $(23 - 6n)$ ومنه :

$$23 + 17 + ... + (23 - 6n) = [23 + (23 - 6n)] \times \frac{n+1}{2} =$$
$$= (23 - 3n)(n+1)$$

$$\pi_n = S_n + (23 - 3n)(n+1) =$$
$$= -60\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + (23 - 3n)(n+1)$$

تمرين 30

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0=-\frac{1}{2}$

والعلاقة التراجعية : $v_{n+1}=\frac{9v_n-8}{2v_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n\neq 2$

2) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\frac{2v_n+1}{v_n-2}$

أ) بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.

ب) أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا نستنتج ؟

3) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_3+u_5+...+u_{2n+1}$

الحل

1) لنبرهن أن $\forall n\in\mathbb{N}:\ v_n\neq 2$ نستعمل البرهان بالتراجع.

لتكن الخاصية $p(n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n\neq 2$.

لدينا $v_0=-\frac{1}{2}\neq 2$ إذن $p(0)$ محققة .

لنفرض أن $p(n)$ صحيحة $(v_n\neq 2)$ ولنبرهن على صحة

$p(n+1)$ أي $(v_{n+1}\neq 2)$ وهذا يعني نبرهن صحة الاستلزام :

$v_n\neq 2$ تستلزم $v_{n+1}\neq 2$. ونعلم أن :

$(v_n\neq 2$ تستلزم $v_{n+1}\neq 2)$ يكافئ $(v_{n+1}=2$ تستلزم $v_n=2)$

$v_{n+1}=\frac{9v_n-8}{2v_n+1}=2$ ومنه $9v_n-8=2(2v_n+1)$ ومنه $v_n=2$

بما أن $p(n)$ تستلزم $p(n+1)$ فإن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n $(v_n\neq 2)$

2- أ) (u_n) متتالية حسابية يعني : $u_{n+1}-u_n=r$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2v_{n+1}+1}{v_{n+1}-2}-\frac{2v_n+1}{v_n-2}=$$

$$\frac{2\times\frac{9v_n-8}{2v_n+1}+1}{\frac{9v_n-8}{2v_n+1}-2}-\frac{2v_n+1}{v_n-2}=$$

$$=\frac{20v_n-15}{5v_n-10}-\frac{2v_n+1}{v_n-2}=\frac{2v_n-4}{v_n-2}=\frac{2(v_n-2)}{v_n-2}=2$$

إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول $u_0=0$

ب) $u_n=u_0+nr=2n$. لدينا : $u_n=\frac{2v_n+1}{v_n-2}$ ومنه :

$v_n(u_n-2)=2u_n+1$ ومنه : $v_n=\frac{2u_n+1}{u_n-2}=\frac{4n+1}{2n-2}$

جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{2n-2}=2$

نستنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة وأن المتتالية (u_n) متباعدة

2) لدينا $u_n = 2n$ ومنه :

$u_1 = 2 , u_3 = 6 , u_5 = 10 ,..., u_{2n+1} = 2(2n+1) = 4n+2$

نلاحظ أن $2 , 6 , 10 , 14 ,..., 2(2n-1) , 2(2n+1)$ هي

تمثل $(n+1)$ حدا متتابعا لمتتالية حسابية حدها الأول 2

وحدهاالأخير $u_{2n+1} = 4n+2$ وأساسها $r = 4$ ومنه :

$$S_n = u_1 + ... + u_{2n+1} = (u_1 + u_{2n+1})\left(\frac{n+1}{2}\right) =$$

$$= (4n+4)\left(\frac{n+1}{2}\right) = 2(n+1)^2$$

تمرين 31

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_0 = 0$ والعلاقة التراجعية :

$\forall n \in \mathbb{N}: 2v_n = \alpha v_{n-1} + 2(\alpha-2)$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

1) عين α حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

2) نفرض أن $\alpha \ge 2$. أ) برهن ان $\forall n \in \mathbb{N}: v_n \ge 0$

ب) برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة .

3) نفرض أن $\alpha \in \mathbb{R} - \{2\}$ ونعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = 2(2+v_n)$.

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها .

ب) أحسب v_n بدلالة n و α.

جـ) عين قيم α حتى تكون (v_n) متقاربة

الحـــل

(v_n) ثابتة يعني : $v_0 = v_1 = ... = v_{n-1} = v_n$.

لدينا : $2v_n = \alpha v_{n-1} + 2(\alpha-2)$ ومنه تكون (v_n) ثابتة إذا كان $2v_0 = \alpha v_0 + 2(\alpha-2)$ ومنه : $0 = 2(\alpha-2)$ ومنه $\alpha = 2$

2- أ) لنبرهن أن $\forall n \in \mathbb{N}: v_n \ge 0$ نستعمل البرهان بالتراجع .

لدينا $v_0 = 0$ ومنه $p(0)$ محققة . نفرض أن $p(n)$ صحيحة $(v_n \ge 0)$ ولنبرهن على صحة $p(n+1)$ $(v_{n+1} \ge 0)$.

لدينا $v_n \ge 0$ (حسب الفرضية) و $v_{n+1} = \frac{\alpha}{2}v_n + (\alpha-2)$.

$v_n \ge 0$ ومنه $\frac{\alpha}{2}v_n \ge 0$ ومنه $\frac{\alpha}{2}v_n + (\alpha-2) \ge 0$ (لأن $\alpha \ge 2$)

أي $v_{n+1} \ge 0$.

بما أن $p(n+1)$ صحيحة فإن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي $v_n \ge 0$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\alpha}{2}v_n + (\alpha-2) - v_n = \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)v_n + (\alpha-2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha-2)v_n + (\alpha-2) = (\alpha-2)\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \ge 0$$

(لأن $\alpha \ge 2$ و $v_n \ge 0$) . بما أن $v_{n+1} - v_n \ge 0$ فإن (v_n) متزايدة

3-أ) تكون (u_n) متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=u_n q$

$$u_{n+1}=2\left(2+v_{n+1}\right)=2\left(2+\frac{\alpha}{2}v_n+\alpha-2\right)=2\left(\frac{\alpha}{2}v_n+\alpha\right)=$$

$$=\frac{\alpha}{2}\times 2\left(v_n+2\right)=\frac{\alpha}{2}u_n$$

إذن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=4$ وأساسها $q=\frac{\alpha}{2}$

ب) $u_n=u_0q^n=4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$. لدينا $u_n=2\left(2+v_n\right)$

ومنه : $v_n=\frac{1}{2}u_n-2=2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n-2$

جـ) تكون (v_n) متتالية متقاربة إذا كان $(\lambda\in\mathbb{R})$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lambda$.

تكون (v_n) متقاربة إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n=0$ وهذا يعني : $\left|\frac{\alpha}{2}\right|<1$

$\left|\frac{\alpha}{2}\right|<1$ يكافئ $-1<\frac{\alpha}{2}<1$ يكافئ $-2<\alpha<2$

إذا كان $\alpha\in\left]-2;2\right[$ فالمتتالية (v_n) متقاربة وتتقارب نحو (-2)

تمرين 32

1) أحسب المجموع $s=1+7+13+...+(6n+1)$

2)لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$v_0=2$ والعلاقة التراجعية : $\forall\in\mathbb{N}:\ v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+3n+\frac{13}{2}$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=v_n-6n-1$

أ) أوجد العلاقة التي تربط بين u_{n+1} و u_n

ب) عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

3) أحسب $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ و $\pi_n=v_0+v_1+...+v_n$

الحل

1) $1\ ,\ 7\ ,\ 13\ ,\ ...,\ (6n+1)$ هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول1 و أساسها $r=6$ وحدها العام $u_n=6n+1$.

إذا استبدلنا في عبارة الحد العام n بالقيم $\{0,1,2,3,...,n\}$ نحصل على $(n+1)$ حدا متتابعا ومنه :

$$s=1+7+13+...+(6n+1)=\left[1+(6n+1)\right]\times(n+1)/2=$$

$$=(3n+1)(n+1)$$

2)

$$u_{n+1}=v_{n+1}-6(n+1)-1=\frac{1}{2}v_n+3n+\frac{13}{2}-6n-7=$$

$$=\frac{1}{2}v_n-3n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(v_n-6n-1\right)=\frac{1}{2}u_n$$

ب) لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها

الأول $u_0=v_0-1=1$. ومنه $u_n=u_0q^n=\frac{1}{2^n}$.

لدينا $u_n=v_n-6n-1$ ومنه $v_n=u_n+6n+1=\frac{1}{2^n}+6n+1$

ج) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

3) $S_n=u_0+\dots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$$\pi_n=v_0+v_1+\dots+v_n=$$
$$=(u_0+1)+(u_1+7)+\dots+(u_n+6n+1)=$$
$$=(u_0+u_1+\dots+u_n)+(1+7+\dots+6n+1)=$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+(3n+1)(n+1)$$

تمرين 33

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ و بالعلاقة :

$\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=\alpha(u_n-2)$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

1) عين العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

2) نضع $\alpha=\frac{2}{3}$.

أ) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\geq-4$.   ب) بين أن (u_n) متتالية متناقصة

3) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\forall n\in\mathbb{N}:v_n=u_n+4$

عين α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها

الأول v_0 وأساسها q .

4) نفرض أن $\alpha=\frac{2}{3}$.   أ) أحسب $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

ب) $P_n=(v_0)^3+(v_1)^3+\dots+(v_n)^3$

الحـــل

1) (u_n) ثابتة يعني : $u_n=u_{n+1}$.   لدينا $u_{n+1}=\alpha(u_n-2)$

تكون (u_n) ثابتة لما $1=\alpha(1-2)$ ومنه $\alpha=-1$

2- أ) لنبرهن أن $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\geq-4$ نستعمل البرهان بالتراجع .

لدينا : $u_0=1\geq-4$ ومنه $p(0)$ محققة .

لنفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_n\geq-4$ ولنبرهن على صحة

$p(n+1)$ أي $u_{n+1}\geq-4$.   لدينا فرضا $u_n\geq-4$ ومنه :

$u_n-2\geq-6$ ومنه $\frac{2}{3}(u_n-2)\geq-6\times\frac{2}{3}$ ومنه $u_{n+1}\geq-4$

إذن $p(n+1)$ صحيحة ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد

طبيعي n أي : $u_n\geq-4$ $(u_n+4\geq0)$

ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}\left(u_n-2\right)-u_n=-\frac{1}{3}\left(u_n+4\right)\le 0$

بما أن $u_{n+1}-u_n\le 0$ فالمتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة

3) تكون $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\alpha\left(u_n-2\right)+4=\alpha\left(u_n+4\right)-6\alpha+4=$$
$$=\alpha\times v_n-6\alpha+4$$

حتى تكون $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية يجب أن : $4-6\alpha=0$ ومنه $\alpha=\frac{2}{3}$

لما $\alpha=\frac{2}{3}$ فالمتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=5$

4) لدينا $\alpha=\frac{2}{3}$ ومنه $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية.

أ-

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=\left(v_0-4\right)+\left(v_1-4\right)+...+\left(v_n-4\right)=$$
$$=\left(v_0+v_1+...+v_n\right)-4\left(n+1\right)=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=$$
$$=15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-4\left(n+1\right)$$

ب-

$$P_n=\left(v_0\right)^3+\left(v_1\right)^3+...+\left(v_n\right)^3=$$
$$=\left(v_0\right)^3+\left(v_0q\right)^3+...+\left(v_0q^n\right)^3=\left(v_0\right)^3\left(1+q^3+...+q^{3n}\right)$$

نعلم أن $1+q^3+q^6+...+q^{3n}$ يمثل مجموع لـ $\left(n+1\right)$ حدا متتابعا لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $q^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

$$1+q^3+q^6+...+q^{3n}=\frac{1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{27}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]$$

$$P_n=125\times\frac{27}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]$$

تمرين 34

في السنة 1995 صنع معمل 2000 دراجة ، نفرض أن عدد الدرجات المصنوعة في هذا المعمل يزداد كل عام بنسبة 5%.

1) ما هو عدد الدراجات الذي سيصنعها هذا المعمل في سنة 2000.

2) في أي سنة يكون عدد الدراجات المصنوعة من طرف هذا المصنع أكبر من 50000 دراجة ؟

الحل

1) لنرمز بـ u_0 إلى عدد الدراجات التي صنعت في سنة 1995

أي: $u_0=20000$ (دراجة) . و بعد سنة (سنة 1996) يكون عدد الدراجات التي يصنعها هذا المعمل : $u_1=u_0+0,05u_0=1,05u_0$

في سنة 1997 يكون عدد الدراجات : $u_2=u_1+0,05u_1=1,05u_1$.

وفي سنة 1998 يكون عدد الدراجات: $u_3 = u_2 + 0,05u_2 = 1,05u_2$.

وفي سنة $(1995+n)$ يكون: $u_n = u_{n-1} + 0,05u_{n-1} = 1,05u_{n-1}$.

إذن عدد الدراجات المصنوعة في هذا المعمل يمثل حدود متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 20000$ وأساسها $q = 1,05$.

عدد الدراجات التي يصنعها هذا المعمل في سنة 2000 هو:

$$u_5 = u_0 \times q^5 = 20000 \times (1,05)^5 = 25524$$

2) نعلم أن عدد الدراجات التي يصنعها هذا المعمل بعد n سنة هو: $u_n = u_0 \times q^n = 20000 \times (1,05)^n$. إذن عدد السنوات التي يكون فيها الإنتاج أكبر من 50000 هو الحل للمتراجحة:

$20000 \times (1,05)^n > 50000$ ومنه $(1,05)^n > 2,5$

باستعمال اللوغارتم النبيري نحصل على: $n \ln 1,05 > \ln 2,5$

ومنه: $0,048 \times n > 0,916$ ومنه: $n > 19,08$

إذن $n = 20$ في سنة $(1995+20)$ أي سنة 2015.

تمرين 35

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ والعلاقة: $u_n - 2u_{n+1} = 2n+3$. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_n + \alpha n - 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

1) عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q. في كل ما يأتي نفرض $\alpha = 2$

2) استنتج أن: $v_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$

3) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$. أحسب S_n و $\lim_{n \to +\infty} S_n$

الحل

1) تكون (v_n) متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n q$

لدينا: $u_n - 2u_{n+1} = 2n+3$ ومنه: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{3}{2}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}u_n - n - \frac{3}{2} + \alpha(n+1) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(u_n + \alpha n - 1) + \frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 =$$

$$= \frac{1}{2}v_n + \left(\frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2\right)$$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان: $\frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 = 0$

$\frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 = 0$ ومنه: $\frac{n}{2}(\alpha - 2) + (\alpha - 2) = 0$

ومنه $\left(\frac{n}{2} + 1\right)(\alpha - 2) = 0$ و منه $\alpha - 2 = 0$ ومنه: $\alpha = 2$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان $\alpha = 2$ ويكون حدها الأول

. $q=\frac{1}{2}$ وأساسها $v_0=u_0-1=1$

2) لما $\alpha=2$ فالمتتالية (v_n) هندسية ويكون $v_n=v_0q^n=\frac{1}{2^n}$

لدينا : $v_n=u_n+2n-1$ ومنه : $u_n=v_n-2n+1$

إذن : $u_n=\frac{1}{2^n}-2n+1$.

3) $S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2$ (لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0$)

تمرين 36

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=\int_n^{n+1}e^{-x+1}dx$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n>0$

2) – أ) أحسب u_n بدلالة n .

ب) استنتج أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول u_0 وأساسها q.

3) نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

أ) أحسب S_n بدلالة n . ب) بين أن $S_n=\int_0^{n+1}e^{-x+1}dx$

الحل

1) نعلم إذا كان $f(x)>0$ لما $x\in[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx>0$.

بما أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^{-x+1}>0$ فإن :

$\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ ومنه $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي n

2- أ) لدينا $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$ ومنه

$$u_n=\int_n^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-e^{-x+1}\right]_n^{n+1}=-e^{-(n+1)+1}+e^{-n+1}=$$

$$=-e^{-n}+e^{-n+1}=-e^{-n}+e\times e^{-n}=(e-1)e^{-n}$$

ب) $u_{n+1}=(e-1)e^{-(n+1)}=e^{-1}(e-1)e^{-n}=e^{-1}\times u_n$

بما أن $u_{n+1}=\frac{1}{e}u_n$ فإن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=e-1$ وأساسها $q=\frac{1}{e}$.

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=(e-1)\frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}}=$$

$$=(e-1)\times\frac{e}{e-1}\times\left(1-e^{-(n+1)}\right)=e\left(1-e^{-(n+1)}\right)$$

ب) $S_n = u_0 + ... + u_n = \int_0^1 e^{-x+1}dx + ... + \int_n^{n+1} e^{-x+1}dx$

نعلم أن إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a;k]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^k f(x)dx = \int_a^k f(x)dx$$

$$S_n = \int_0^1 e^{-x+1}dx + \int_1^2 e^{-x+1}dx + ... + \int_n^{n+1} e^{-x+1}dx = \int_0^{n+1} e^{-x+1}dx$$

تمرين 37

لتكن المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 5/3$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $\alpha u_n = 3u_{n-1} + 2$ حيث $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,3\}$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{\alpha - 3}$.

1- أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها بدلالة α.

ب) عين α حتى تكون (v_n) متقاربة .

نفرض أن $\alpha = 6$.   أ) عين عبارة v_n ثم u_n بدلالة n .

ب) أحسب المجموع $S_n = u_0 + ... + u_n$

جـ) أحسب $\pi_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 2) + ... + (v_n + 2^n)$

الحـل

1- أ) تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وجد عدد q بحيث $v_{n+1} = v_n q$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{\alpha - 3} = \frac{3}{\alpha}u_n + \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha - 3} =$$

$$= \frac{3}{\alpha}u_n + \frac{2(\alpha - 3) - 2\alpha}{\alpha(\alpha - 3)} = \frac{3}{\alpha}u_n - \frac{6}{\alpha(\alpha - 3)} =$$

$$= \frac{3}{\alpha}\left(u_n - \frac{2}{\alpha - 3}\right) = \frac{3}{\alpha}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{\alpha}$ وحدها الأول

$$v_0 = u_0 - \frac{2}{\alpha - 3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{\alpha - 3} = \frac{5\alpha - 21}{3(\alpha - 3)}$$

ب) تكون المتتالية الهندسية متقاربة إذا كان $-1 < q < 1$

ومنه (v_n) متقاربة إذا وفقط $-1 < 3/\alpha < 1$ ومنه :

$-1 < \frac{3}{\alpha} < 1$ يكافئ ($\frac{3}{\alpha} > -1$ و $\frac{3}{\alpha} < 1$) أي :

($\frac{3+\alpha}{\alpha} > 0$ و $\frac{3-\alpha}{\alpha} < 0$) ومنه :

$\alpha \in]-\infty;-3[\cup]0;+\infty[$ و $\alpha \in]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$

إذن : $\alpha \in]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$

2- أ) لما $\alpha = 6$ فإن $v_0 = 1$ و $q = \frac{1}{2}$ إذن : $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2^n}$

لدينا $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه : $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3}$

ب) $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n =$

$$= \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + ... + \left(v_n + \frac{2}{3}\right)$$

$$= (v_0 + v_1 + ... + v_n) + \frac{2}{3}(n+1) = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{2}{3}(n+1)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$$

جـ -

$$\pi_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 2) + (v_2 + 2^2) + ... + (v_n + 2^n) =$$

$$= (v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n) + (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - \frac{1}{2^n} + 1$$

لأن $1 + 2 + ... + 2^n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$ وهي تمثل مجموع

لـ $(n+1)$ حدا متتابعا لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 2

تمرين 38

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ 2u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1} = 0 \end{cases} \quad و \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1) أحسب u_2 و u_3 ثم v_0 و v_1.

2- أ) أثبت أن (v_n) ثابتة وحدد قيمة v_n. ب) استنتج u_{n+1} بدلالة u_n

3) لتكن المتتالية (p_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $p_n = u_n - 3$

أ) بين أن (p_n) هي متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

ب)أحسب p_n و u_n بدلالة n . جـ) أحسب بدلالة n كل من :

$S_1 = p_0 + ... + p_n$ ، $S_2 = u_0 + ... + u_n$ ،

$\pi = p_0 \times ... \times p_n$

الحل

1) لدينا : $2u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1} = 0$ ومنه : $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1}$

$u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{5}{2}$ ، $u_3 = \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{11}{4}$

$v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{3}{2}$ ، $v_1 = u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{3}{2}$

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_n = u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} = v_{n-1}$$

2) أ- بما أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n = v_{n-1}$ فالمتتالية (v_n) ثابتة

ومنه $v_0 = v_1 = ... = v_n = \frac{3}{2}$. ب) لدينا $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

ومنه : $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2}$ معناه : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$

3- أ) تكون (p_n) متتالية هندسية إذا وجد عدد q بحيث $p_{n+1} = p_n q$

$p_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2}p_n$.

بما أن $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$ فالمتتالية (p_n) هي هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $p_0 = -2$.

ب) $p_n = p_0 \times q^n = -2 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-1}}$

لدينا $p_n = u_n - 3$ ومنه : $u_n = p_n + 3 = -\frac{1}{2^{n-1}} + 3$.

جـ)

$$S_1 = p_0 + ... + p_n = p_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -4\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$S_2 = u_0 + ... + u_n = (p_0+3) + ... + (p_n+3) =$$

$$= (p_0 + ... + p_n) + 3(n+1) = -4\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + 3(n+1)$$

$$\pi = p_0 \times p_1 \times ... \times p_n =$$

$$= p_0 \times (p_0 q) \times ... \times (p_0 q^n) = (p_0)^{n+1} \times q \times q^2 \times ... \times q^n =$$

$$= p_0^{n+1} \times q^{1+2...+n} = (p_0)^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (-2)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

تمرين 39

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_1 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية : $3v_{n+1} - 2v_n = 3$.

1) أحسب v_2 , v_3 , v_4 بدلالة α

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = v_n - 3$

أ) أحسب u_1 وبين أن $3u_{n+1} - 2u_n = 0$. ماذا نستنتج ؟

ب) أحسب u_n ثم v_n بدلالة α و n .

3) أحسب $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ ، $S'_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

4) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بـ : $p_n = v_n + \alpha$

ا) عين العدد الحقيقي α حتى تكون (p_n) متتالية هندسية .

ب) نفرض أن $\alpha = -3$. أحسب : $\pi_n = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2$

الحل

1) لدينا $3v_{n+1} - 2v_n = 3$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + 1$ إذن :

$v_2 = \frac{2}{3}\alpha + 1$ ، $v_3 = \frac{4}{9}\alpha + \frac{5}{3}$ ، $v_4 = \frac{8}{27}\alpha + \frac{19}{9}$

2- أ) $u_1 = v_1 - 3 = \alpha - 3$

لدينا : $u_{n+1} = v_{n+1} - 3$ و $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + 1$ ومنه :

$$3u_{n+1} - 2u_n = 3\left(v_{n+1} - 3\right) - 2\left(v_n - 3\right) =$$

$$= 3\left(\frac{2}{3}v_n - 2\right) - 2v_n + 6 = 2v_n - 6 - 2v_n + 6 = 0$$

بماأن $3u_{n+1} - 2u_n = 0$ أي $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$ فا لمتتالية (u_n) هندسية حدها الأول u_1 وأساسها $q = \frac{2}{3}$

ب- $u_n = u_1 q^{n-1} = (\alpha - 3)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. لدينا $u_n = v_n - 3$

ومنه : $v_n = u_n + 3 = (\alpha - 3)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3$

(3 $S_n = u_1 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} =$

$$= 3(\alpha - 3)\times\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$S'_n = v_1 + \dots + v_n = \left(u_1 + 3\right) + \dots + \left(u_n + 3\right) =$$

$$= \left(u_1 + u_2 + \dots + u_n\right) + 3n = S_n + 3n =$$

$$= 3(\alpha - 3)\times\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + 3n$$

4) تكون المتتالية (p_n) هندسية إذاوجد عدد q بحيث $p_{n+1} = p_n \times q$

$$p_{n+1} = v_{n+1} + \alpha = \frac{2}{3}v_n + 1 + \alpha = \frac{2}{3}\left(v_n + \alpha\right) + \frac{1}{3}\alpha + 1 =$$

$$= \frac{2}{3}p_n + \left(\frac{1}{3}\alpha + 1\right)$$

تكون (p_n) متتالية هندسية إذا كان $\frac{1}{3}\alpha + 1 = 0$ أي : $\alpha = -3$

من أجل $\alpha = -3$ المتتالية (p_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $p_1 = v_1 + \alpha = 2\alpha = -6$

$$\pi_n = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_1^2 + \left(u_1 q\right)^2 + \dots + \left(u_1 q^{n-1}\right)^2 =$$

$$= u_1^2\left(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2(n-1)}\right)$$

$$= 36\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)}\right)$$

$$\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)}\right)$$

هومجموع لـ n حدا متتابعا لمتتالية هندسية حدهاالأول 1 وأساسها $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ إذن:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)}=\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

إذن : $\pi_n=36\times\frac{9}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$.

تمرين 40

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n

بـ : $u_{n+2}=\frac{1}{2}a^2u_{n+1}+(a-3)u_n$ حيث a عدد حقيقي .

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) نضع $a=2$.

أ) تحقق بأن المتتالية (v_n) ثابتة .

ب) استنتج أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها لأول.

جـ) عبر بدلالة n عن u_n و $S_n=u_0+\dots+u_n$.

د) استنتج مجموع الأعدادالفردية الأصغر من 100

2) نضع $a=-4$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء حدها العام

ب) أحسب $S'_n=v_0+v_1+\dots+v_n$

جـ) برهن أن $S'_n=u_{n+1}-1$ واستنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة .

الحل

1) تكون المتتالية (v_n) ثابتة إذاكان من أجل كل عدد طبيعي n

يكون لدينا : $v_{n+1}=v_n$. إذا كان $a=2$ فإن :

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{1}{2}a^2u_{n+1}+(a-3)u_n-u_{n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}(2)^2u_{n+1}+(2-3)u_n-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n=v_n$$

بماأن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_{n+1}=v_n$ فالمتتالية (v_n) هي متتالية ثابتة $v_n=v_0=u_1-u_0=2$

ب) لدينا $u_{n+1}-u_n=v_n=2$ حسب التعريف فالمتتالية (u_n) هي متتالية حسابية حدها الأول $u_0=1$ واساسها 2.

ج) $u_n=u_0+nr=1+2n$.

د) لدينا $u_n=1+2n$ وهو يمثل عدد فردي ؛

$u_0=1$, $u_1=3$, $u_2=5$,..., $u_n=1+2n$ نلاحظ أن حدود (u_n) هي الأعداد الطبيعية الفردية والمتتابعة

نعلم أن $u_{49}=1+2\times49=99$ ، ويكون مجموع الأعداد الفردية الأصغر من100 هو :

$$1+3+\dots+99=u_0+u_1+\dots+u_{49}=(u_0+u_{49})\times\frac{50}{2}=$$

$$=(1+99)\times25=100\times25=2500$$

2- أ) إذا كان $a=-4$ فإن : $u_{n+2}=8u_{n+1}-7u_n$